Шәкір Айдос

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

2-лекция. Решение системы линейных алгебраических уравнений. Метод итерации.

Цель лекции – изучить методы решения систем линейных алгебраических уравнений, освоить итерационные методы (например, метод простых итераций), понять условия сходимости итерационных процессов и научиться применять их для нахождения приближённых решений систем.

План лекции:

1 Метод итерации

Рассмотрим следующую *систему линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ). Для простоты рассуждений рассмотрим систему с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}, \tag{1.1}$$

где x_1, x_2, x_3- неизвестные переменные, $a_{ij}-$ коэффициенты при переменных в уравнениях ($i = 1, 2, 3$ номер уравнения, $j = 1, 2, 3$ номер переменной), b_1, b_2, b_3-свободные члены (правая часть уравнений).

Если мы запишем систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде, то имеем

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{1.2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Предполагаем, что диагональные коэффициенты

$$a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{1.4}$$

1. Разрешая первое уравнение системы (1.1) относительно x_1, получаем

$$x_1 = \underbrace{\frac{b_1}{a_{11}}}_{\beta_1} \underbrace{-\frac{a_{12}}{a_{11}}}_{\alpha_{12}} x_2 \underbrace{-\frac{a_{13}}{a_{11}}}_{\alpha_{13}} x_3. \tag{1.5}$$

Следовательно,

$$x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3. \tag{1.6}$$

2. Разрешая второе уравнение системы (1.1) относительно x_2, получаем

$$x_2 = \underbrace{\frac{b_2}{a_{22}}}_{\beta_2} \underbrace{-\frac{a_{21}}{a_{22}}}_{\alpha_{21}} x_1 \underbrace{-\frac{a_{23}}{a_{22}}}_{\alpha_{23}} x_3. \tag{1.7}$$

Следовательно,

$$x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{23}x_3. \tag{1.8}$$

3. Разрешая второе уравнение системы (1.1) относительно x_3, получаем

$$x_3 = \underbrace{\frac{b_3}{a_{33}}}_{\beta_2} \underbrace{-\frac{a_{31}}{a_{33}}}_{\alpha_{31}} x_1 \underbrace{-\frac{a_{32}}{a_{22}}}_{\alpha_{32}} x_2. \tag{1.9}$$

Следовательно,

$$x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2. \tag{1.10}$$

Используя формулы (1.6), (1.8) и (1.10), получаем эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_3, \\ x_3 = \beta_3 + \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \end{cases}. \tag{1.11}$$

Введем следующие матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Здесь элементы $\alpha_{jj} = 0$, $j = 1, 2, 3$. Систему (1.11) можем записать в матричной форме

$$\mathbf{x} = \beta + \alpha \mathbf{x}. \tag{1.13}$$

Систему (1.13) будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение выберем, например, столбец свободных членов:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \beta \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

где $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}$ – нулевое приближение. Далее, последовательно строим матрицы-столбцы

$$\mathbf{x}^{(1)} = \beta + \alpha \mathbf{x}^{(0)} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

где $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$ – первое приближение. Отсюда имеем

$$\mathbf{x}^{(2)} = \beta + \alpha \mathbf{x}^{(1)} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

где $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$ –второе приближение. Вообще говоря, любое $(k+1)$-е приближение вычисляют по формуле

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha \mathbf{x}^{(k)} \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{1.17}$$

Если последовательность приближений $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(k)}, \ldots$ имеет предел

$$\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

то этот предел является решением системы (1.13). В самом деле, переходя к пределу в равенстве (1.17), будем иметь:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

или

$$\mathbf{x} = \beta + \alpha\mathbf{x},$$

т. е. предельный вектор $\mathbf{x}$ является решением системы (1.13), а следовательно, и системы (1.1).

2 Пример

Решить систему

$$\begin{cases} 4x_1 + 0,24x_2 - 0,08x_3 = 8, \\ 0,09x_1 + 3x_2 - 0,15x_3 = 9, \\ 0,04x_1 - 0,08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases} \tag{2.1}$$

методом итерации.

Решение. Здесь диагональные коэффициенты $4, 3, 4$ системы значительно преобладают над остальными коэффициентами. Приведём эту систему к нормальному виду (1.11):

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0,06x_2 + 0,02x_3, \\ x_2 = 3 - 0,03x_1 + 0,05x_3, \\ x_3 = 5 - 0,01x_1 + 0,02x_2. \end{cases} \tag{2.2}$$

В матричной форме систему (2.2) можно записать так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -0,06 & 0,02 \\ -0,03 & 0 & 0,05 \\ -0,01 & 0,02 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

За нулевые приближения корней системы (2.1) принимаем:

$$x_1^{(0)} = 2, \quad x_2^{(0)} = 3, \quad x_3^{(0)} = 5.$$

Подставляя эти значения в правые части уравнений (2.2), получим первые приближения корней:

$$x_1^{(1)} = 2 - 0,06 \cdot 3 + 0,02 \cdot 5 = 1,92, \quad x_2^{(1)} = 3 - 0,03 \cdot 2 + 0,05 \cdot 5 = 3,19, \quad x_3^{(1)} = 5 - 0,01 \cdot 2 + 0,02 \cdot 3 = 5,04.$$

Далее, подставляя эти найденные приближения в формулу (2.2), получим вторые приближения корней:

$$x_1^{(2)} = 1,9094, \quad x_2^{(2)} = 3,1944, \quad x_3^{(2)} = 5,0446.$$

После новой подстановки будем иметь третьи приближения:

$$x_1^{(3)} = 1,90923, \quad x_2^{(3)} = 3,19495, \quad x_3^{(3)} = 5,04485, \ldots$$

Результаты вычислений можно оформить в таблице:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	2	3	5
1	1,92	3,19	5,04
2	1,9094	3,1944	5,0446
3	1,90923	3,19495	5,04485

3 Метод Зейделя

Систему (1.13) будем решать методом последовательных приближений. За нулевое приближение выберем, например, столбец свободных членов:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \beta \qquad \text{или} \qquad \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix}$ – нулевое приближение. При подстановке полученного нулевого приближения (1.11) в систему получаем выражение следующего вида

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \beta_1 + \alpha_{12} x_2^{(0)} + \alpha_{13} x_3^{(0)}, \\ x_2^{(1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(1)} + \alpha_{23} x_3^{(0)}, \\ x_3^{(1)} = \beta_3 + \alpha_{31} x_1^{(1)} + \alpha_{32} x_2^{(1)} \end{cases} . \tag{3.2}$$

где $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$ – первое приближение. Отсюда имеем

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(1)} + \alpha_{13}x_3^{(1)}, \\ x_2^{(2)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(2)} + \alpha_{23}x_3^{(1)}, \\ x_3^{(2)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(2)} + \alpha_{32}x_2^{(2)} \end{cases}, \tag{3.3}$$

где $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$ –второе приближение. В общем случае $(k+1)$-е приближение вычисляется по формуле

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \alpha_{12}x_2^{(k+1)} + \alpha_{13}x_3^{(k+1)}, \\ x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{23}x_3^{(k+1)}, \\ x_3^{(k+1)} = \beta_3 + \alpha_{31}x_1^{(k)} + \alpha_{32}x_2^{(k)} \end{cases}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{3.4}$$

Если последовательность приближений $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots$ имеет предел

$$\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

то этот предел является решением системы (1.13). В самом деле, переходя к пределу в равенстве (3.4), будем иметь:

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)},$$

или

$$\mathbf{x} = \beta + \alpha\mathbf{x},$$

т. е. предельный вектор $\mathbf{x}$ является решением системы (1.13), а следовательно, и системы (1.1).

4 Пример

Методом Зейделя решить систему уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14. \end{cases}$$

Решение. Приведём эту систему к виду, удобному для итерации:

$$\begin{cases} x_1 = 1.2 - 0.1x_2 - 0.1x_3, \\ x_2 = 1.3 - 0.2x_1 - 0.1x_3, \\ x_3 = 1.4 - 0.2x_1 - 0.2x_2. \end{cases}$$

В качестве нулевых приближений корней возьмём:

$$x_1^{(0)} = 1.2, \qquad x_2^{(0)} = 0, \qquad x_3^{(0)} = 0.$$

Применяя процесс Зейделя, последовательно получим:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1.2 - 0.1 \cdot 0 - 0.1 \cdot 0 = 1.2, \\ x_2^{(1)} = 1.3 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.1 \cdot 0 = 1.06, \\ x_3^{(1)} = 1.4 - 0.2 \cdot 1.2 - 0.2 \cdot 1.06 = 0.948, \end{cases} \tag{I}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1.2 - 0.1 \cdot 1.06 - 0.1 \cdot 0.948 = 0.9992, \\ x_2^{(2)} = 1.3 - 0.2 \cdot 0.9992 - 0.1 \cdot 0.948 = 1.00536, \\ x_3^{(2)} = 1.4 - 0.2 \cdot 0.9992 - 0.2 \cdot 1.00536 = 0.999088, \end{cases} \tag{II}$$

и т. д.

Результаты вычислений с точностью до четырёх знаков помещены в таблице.

Таблица 1: Нахождение корней линейной системы методом Зейделя

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.2000	0.0000	0.0000
1	1.2000	1.0600	0.9480
2	0.9992	1.0054	0.9991
3	0.9996	1.0001	1.0001
4	1.0000	1.0000	1.0000
5	1.0000	1.0000	1.0000

Точные значения корней:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = 1.$$

5 Преимущества и недостатки метода итерации Якоби

- Простота реализации: формула метода Якоби очень проста и легко программируется.
- Параллельность вычислений: новые значения переменных на каждой итерации вычисляются независимо друг от друга.
- Не требует разложения матрицы: работает без полного разложения матрицы, что экономит память для больших систем.
- Эффективен для разреженных систем: сохраняет структуру разреженной матрицы и не создаёт дополнительных заполнений.
- Лёгкий контроль сходимости: можно оценить сходимость с помощью норм матрицы или диагонального преобладания.
- Медленная сходимость: метод может сходиться медленно, особенно для плохо обусловленных систем.
- Требует диагонального преобладания: для гарантии сходимости матрица должна удовлетворять определённым условиям.
- Не всегда эффективен для плотных матриц: при плотных системах прямые методы могут быть быстрее.

6 Контрольные вопросы

1. Что такое метод Якоби для решения систем линейных алгебраических уравнений?
2. Как записывается итерационная формула метода Якоби для системы $Ax = b$?
3. В чем заключается принцип разложения матрицы A на диагональную и недиагональную части в методе Якоби?
4. Какие условия обеспечивают сходимость метода Якоби?
5. Как можно проверить, что итерационный процесс метода Якоби сошелся к точному решению?
6. В чем различие между методом Якоби и методом Гаусса–Зейделя?

7. Как влияет размер диагональных элементов матрицы A на скорость сходимости метода Якоби?

8. Решите систему методом Якоби

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1.235 \\ 1,089 \\ 0,560 \end{pmatrix}$$

9. Решите систему методом Зейделя

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25, \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11, \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15. \end{cases} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–8].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Копченова, Н. В., и И. А. Марон. *Вычислительная математика в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2019.

[2] Самарский, А. А., и А. В. Гулин. *Численные методы: Учебное пособие для вузов*. Москва: Наука, 1989.

[3] Киреев, В. И., и А. В. Пантелеев. *Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие*. Санкт-Петербург: Издательство «Лань», 2015.

[4] Kiusalaas, Jaan. *Numerical Methods in Engineering with Python*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

[5] Демидович, Б. П., и И. А. Марон. *Основы вычислительной математики: Учебное пособие*. 8-е изд. Санкт-Петербург: Лань, 2022.

[6] Шакенов, Қ. Қ. *Есептеу математикасы әдістері: лекциялар курсы.* Алматы: 2019.

[7] Сұлтанғазин, Ө. М., және С. Атанбаев. *Есептеу әдістерінің қысқаша теориясы.* Алматы: Білім, 2016.

[8] Демидович, В. П., және Е. Б. Марон. *Основы вычислительной математики.* Москва: Наука, 1970.